11　集合と論証

80

$\overline{P \cap Q} = \overline{P} \cup \overline{Q}$ より，$\overline{P \cap Q}$ の要素 x は $\left|x - \frac{13}{2}\right| < 3$ または $x^2 + 18x + 79 < 0$

すなわち $\frac{7}{2} < x < \frac{19}{2}$ または $-9 - \sqrt{2} < x < -9 + \sqrt{2}$　・・・①

R の要素 x は，$|x| \leq \frac{a}{2}$ より，$-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$　・・・②

ただし，$0 \leq |x| \leq \frac{a}{2}$ より，$a \geq 0$　・・・③

①，②，③より，$-\frac{a}{2} \leq -9 - \sqrt{2}$ かつ $\frac{19}{2} \leq \frac{a}{2}$　すなわち $a \geq 18 + 2\sqrt{2}$ かつ $a \geq 19$

よって，$a \geq 18 + 2\sqrt{2}$

これと，$20 < 18 + 2\sqrt{2} < 21$ より，求める整数 a の値は 21

81

(1)

真

証明

$(x+y)^2 \leq (xy+1)^2$　すなわち　$(xy+1)^2 - (x+y)^2 \geq 0$ について，

$$
\begin{aligned}
(xy+1)^2 - (x+y)^2 &= (xy+1+x+y)(xy+1-x-y) \\
&= \{(x+1)(y+1)\}\{(x-1)(y-1)\} \\
&= (x^2-1)(y^2-1)
\end{aligned}
$$

より，$(x^2-1)(y^2-1) \geq 0$

よって，$x^2 \leq 1$ かつ $y^2 \leq 1$ は $(x+y)^2 \leq (xy+1)^2$ であるために十分条件である。

これと，$x^2 \leq 1$ かつ $y^2 \leq 1$ は $|x| \leq 1$ かつ $|y| \leq 1$ と同値であることから，命題は真である。

(2)

偽

反例は $a = b = 0,\ c = 1$，$a = -1,\ b = 2,\ c = -3$ など

(3)

真

証明

有理数の解を α，β とすると，解と係数の関係より，

$\alpha + \beta = -3$　・・・①　$\alpha\beta = m$　・・・②

①より，α，β は一方が偶数で，一方が奇数である。

よって，②において，$\alpha\beta$ は偶数と奇数の積となるから，m は偶数である。

82

(1)

十分条件である。

命題：n が素数 $\to$ $\sqrt{n}$ は無理数

命題の対偶は，$\sqrt{n}$ が有理数 $\to$ n は 1 または合成数

$\sqrt{n}=\dfrac{p}{q}$（p と q は互いに素）とおくと，$n=\dfrac{p^2}{q^2}$

p と q は互いに素だから，p^2 と q^2 も互いに素である。

これと n は整数であることから，$q^2=1$

よって，$n=p^2$ すなわち n は 1 または合成数である。

命題の対偶が真だから，命題は真である。

命題：$\sqrt{n}$ が無理数 $\to$ n は素数

偽　反例：$n=6$

(2)

必要条件でも十分条件でもない。

命題：n が奇数 $\to$ $\sqrt{n}$ は無理数

偽　反例：$n=1$

命題：$\sqrt{n}$ が無理数 $\to$ n は奇数

偽　反例：$n=2$

(3)

必要十分条件である。

命題：n が整数の 2 乗でない。$\to$ $\sqrt{n}$ は無理数である。

命題の対偶「$\sqrt{n}$ が有理数 $\to$ n は整数の 2 乗である」の真偽について，

$\sqrt{n}=\dfrac{p}{q}$（p と q は互いに素）とおくと，$n=\dfrac{p^2}{q^2}$

p と q は互いに素だから，p^2 と q^2 も互いに素である。

これと n は整数であることから，$q^2=1$

よって，$n=p^2$ すなわち n は整数の 2 乗である。

ゆえに，命題の対偶が真だから，命題は真である。

命題：$\sqrt{n}$ は無理数である。$\to$ n が整数の 2 乗でない。

命題の対偶「n は整数の 2 乗である $\to$ $\sqrt{n}$ は有理数である」の真偽について，

$n=p^2$（p は整数）とすると $\sqrt{n}=\sqrt{p^2}=|p|$ より，$\sqrt{n}$ は有理数である。

よって，命題の対偶は真であり，これより，命題は真である。

83

$\boldsymbol{(x+y+z)^2 \le 3(x^2+y^2+z^2)}$

$$3(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2 = 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx$$
$$=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \ge 0$$

よって，

$(x+y+z)^2 \le 3(x^2+y^2+z^2)$

等号成立は $x-y=0$ かつ $y-z=0$ かつ $z-x=0$ のとき　すなわち　$x=y=z$ のとき

$\boldsymbol{x^2+y^2+z^2 \le a}$ **ならば** $\boldsymbol{x+y+z \le a}$

$(x+y+z)^2 \le 3(x^2+y^2+z^2)$，　$x^2+y^2+z^2 \le a$ より，

$(x+y+z)^2 \le 3(x^2+y^2+z^2) \le 3a$　　$\therefore -\sqrt{3a} \le x+y+z \le \sqrt{3a}$

よって，命題が真となるための条件は $\sqrt{3a} \le a$

$0 \le \sqrt{3a} \le a$ より，$3a \le a^2$　　$\therefore a(a-3) \ge 0$

これと $a>0$ より，$a \ge 3$

よって，a の最小値は 3

84

命題 $\boldsymbol{p}$

正しくない。

理由

$\sqrt{n}$ を有理数とし，$\sqrt{n}=\dfrac{p}{q}$ （p と q は互いに素な自然数）と表す。

この両辺を 2 乗すると，$n=\dfrac{p^2}{q^2}$

p と q は互いに素な自然数だから，p^2 と q^2 も互いに素な自然数である。

これと n は自然数であることから，$q^2=1$　　$\therefore n=p^2$　　・・・①

よって，$\sqrt{n+1}=\sqrt{p^2+1}$

$\sqrt{n+1}=\sqrt{p^2+1}$ も有理数とし，$\sqrt{p^2+1}=\dfrac{m}{n}$ （m と n は互いに素な自然数）と表すと，

上と同様にして，$p^2+1=m^2$　　$\therefore (m+p)(m-p)=1$

p, m は自然数だから，$p+m=1$ かつ $p-m=1$

ところが $m>p\ge 1$ より，$p+m \ge 3$

よって，不適

ゆえに，$\sqrt{n}$ と $\sqrt{n+1}$ がともに有理数となることはない。

すなわち，命題 p は正しくない。

補足

あるいは，$p+m=1$ かつ $p-m=1$ を解くと，$p=1,\ m=0$ となり不適

命題 q

正しい。

理由

命題 q の否定は，「ある n に対して，$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ は有理数である」である。

このとき，$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=r$ （r は正の有理数）と表せる。

すると，$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}++\sqrt{n}}$ より，$\sqrt{n+1}+\sqrt{n}=\dfrac{1}{r}$

よって，連立方程式 $\begin{cases}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=r\\ \sqrt{n+1}+\sqrt{n}=\dfrac{1}{r}\end{cases}$ を解くことにより，

$\sqrt{n}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r}-r\right),\ \sqrt{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r}+r\right)$

すなわち，$\sqrt{n}$ と $\sqrt{n+1}$ はともに有理数となる。

これは，命題 p が偽であることと矛盾する。

よって，命題 q の否定は偽である。

ゆえに，命題 q は正しい。